1-

a) Falsa. Se A é satisfatível, isso significa que existe uma valoração que faz A verdadeira. Então, essa mesma valoração faz ¬A falsa, ou seja, ¬A não é satisfatível.

b) Verdadeira. Se A é tautologia, então toda valoração faz A verdadeira. Portanto, não existe nenhuma valoração que faça ¬A verdadeira, o que implica que ¬A é contraditória.

c) Falsa. Se A é satisfatível, isso significa que existe uma valoração que faz A verdadeira. Isso não implica que todas as valorações fazem A verdadeira, ou seja, A não é necessariamente uma tautologia.

d) Verdadeira. Se A é contraditória, isso significa que não existe nenhuma valoração que faça A verdadeira. Portanto, todas as valorações fazem ¬A verdadeira, o que implica que ¬A é satisfatível.

e) Verdadeira. Se A |= B, isso significa que toda valoração que faz A verdadeira também faz B verdadeira. Se A é uma tautologia, então toda valoração faz A verdadeira, o que implica que toda valoração faz B verdadeira. Logo, B é tautologia.

f) Falsa. Se A |= B, isso significa que toda valoração que faz A verdadeira também faz B verdadeira. Se B é uma tautologia, então toda valoração faz B verdadeira, mas isso não implica que toda valoração faz A verdadeira. Portanto, A não é necessariamente uma tautologia.

2-

podemos criar a árvore semântica associada à fórmula H. Começamos criando um nó para H e, em seguida, adicionamos os nós para suas duas partes: a hipótese e a conclusão. Para a hipótese, criamos um nó para o conectivo de conjunção (^) e dois nós para suas duas partes: P e Q. Para a conclusão, fazemos o mesmo, mas com o conectivo de conjunção (R^S). A árvore semântica fica assim:

H

/ \

/ \

/ \

^ ^

/ \ / \

P Q R S

Para determinar se a fórmula H é uma tautologia, satisfatível ou contraditória, precisamos verificar todas as possíveis atribuições de verdade às suas variáveis proposicionais.

Como podemos ver na árvore semântica acima, a única maneira de a fórmula H ser falsa é se a hipótese (P^Q) for verdadeira e a conclusão (R^S) for falsa. Portanto, para encontrar uma interpretação I tal que I[H] = F, precisamos encontrar uma interpretação em que (P^Q) é verdadeira e (R^S) é falsa.

Uma interpretação possível seria:

• P = verdadeiro

• Q = verdadeiro

• R = falso

• S = falso

Com essa interpretação, temos que:

• (P^Q) = verdadeiro (já que ambos são verdadeiros)

• (R^S) = falso (já que ambos são falsos)

Assim, I[H] = F, o que significa que encontramos uma interpretação em que a fórmula H é falsa.

Portanto, a fórmula H não é uma tautologia, mas é satisfatível.

4. Considere as fórmulas a seguir:

a) ~p v q

b) ~q-> p

c) p <-> q

d) p-> q

e) ~p -> ~q

f) p ^ ~q

Determine, utilizando o método da negação, os casos em que:

a) (P ∧ Q) → G é tautologia

b) (P → Q) → G é tautologia

c) (P v Q) |= G

d) (P ↔ Q) |= G

as fórmulas de a-f, devem ser substituídas nas fórmulas seguintes de a-d onde aparece G.

1. (P ∧ Q) → (P→Q) é tautologia
2. b) (P → Q) → (~P → ~Q) é tautologia
3. (P v Q) |= (~Q-> P)

d) (P ↔ Q) |= (P-> Q)

5)-

Levando em conta o que aprendeu sobre equivalências e em particular sobre as Leis de De Morgan, escreva a negação das seguintes proposições compostas:

a) Se a comida é boa, então o serviço é excelente.

b) Ou a comida é boa, ou o serviço é excelente.

c) Ou a comida é boa e o serviço é excelente, ou então está caro.

d) Nem a comida é boa, nem o serviço é excelente.

e) Se é caro, então a comida é boa e o serviço é excelente.

Respostas:

a) A negação da proposição "Se a comida é boa, então o serviço é excelente" é "A comida é boa e o serviço não é excelente".

b) A negação da proposição "Ou a comida é boa, ou o serviço é excelente" é "Nem a comida é boa, nem o serviço é excelente".

c) A negação da proposição "Ou a comida é boa e o serviço é excelente, ou então está caro" é "A comida não é boa ou o serviço não é excelente e não está caro".

d) A negação da proposição "Nem a comida é boa, nem o serviço é excelente" é "A comida é boa ou o serviço é excelente".

e) A negação da proposição "Se é caro, então a comida é boa e o serviço é excelente" é "É caro e ou a comida não é boa ou o serviço não é excelente".

6)-

Para as seguintes fórmulas, responda: Seja J uma interpretação que interpreta todas as

fórmulas como sendo verdadeiras. Além disso, J[P] = T. O que se pode concluir a respeito

de J[Q] e J[R], em cada um dos casos?

a) (~p v q ) <-> (p ->q)

b) p -> ((q-> r ) -> ((p->r) -> (p-> r)))

c) (p->~q) <-> ~p

d) (q -> ~p)

e) (p -> (q->r)) <-> ((p^q) -> r)

f) (p-> q ) -> (((p^q ) <-> p ) ^ ((p v q) <-> q )))

a) A partir da interpretação J[P] = T e da fórmula (~p v q) <-> (p -> q), podemos concluir que J[(~p v q)] = J[(p -> q)] = T. Como J[P] = T, temos que J[~P] = F. Portanto, J[Q] = T e J[R] = T.

b) A partir da interpretação J[P] = T e da fórmula p -> ((q-> r ) -> ((p->r) -> (p-> r))), podemos concluir que J[p] = J[((q->r) -> ((p->r) -> (p->r)))] = T. Portanto, temos que J[Q] = T e J[R] = T.

c) A partir da interpretação J[P] = T e da fórmula (p->~q) <-> ~p, podemos concluir que J[(p->~q)] = J[~p] = F. Portanto, temos que J[Q] = F e J[R] é indeterminado.

d) A partir da interpretação J[P] = T e da fórmula (q -> ~p), podemos concluir que J[Q] é indeterminado e J[R] = F.

e) A partir da interpretação J[P] = T e da fórmula (p -> (q->r)) <-> ((p^q) -> r), podemos concluir que J[(p -> (q->r))] = J[((p^q) -> r)] = T. Portanto, temos que J[Q] = T e J[R] = T.

f) A partir da interpretação J[P] = T e da fórmula (p-> q ) -> (((p^q ) <-> p ) ^ ((p v q) <-> q ))), podemos concluir que J[((p^q) <-> p)] = J[((p v q) <-> q)] = T. Portanto, temos que J[Q] = T e J[R] = T.

7. Faça a simplificação lógica das fórmulas abaixo utilizando as equivalências clássicas. Obs: Equivalências clássicas abaixo.

a) (p^(~(~p v q ))) v (p ^q )

• ¬¬P ≡ P (Dupla Negação)

• ¬(P v Q) ≡ ¬P ∧ ¬Q (Lei de De Morgan)

Aplicando essas equivalências, temos:

(p^(~(~p v q))) v (p^q)

≡ (p ∧ (p ∨ ¬q)) v (p ∧ q) (Lei de De Morgan)

≡ ((p ∧ p) ∨ (p ∧ ¬q)) v (p ∧ q) (Distributividade da disjunção)

≡ (p ∨ (p ∧ ¬q)) v (p ∧ q) (Identidade da conjunção)

≡ p v (p ∧ q) (Absorção da conjunção)

Portanto, a fórmula (p^(~(~p v q ))) v (p ^q ) é equivalente a p v (p ∧ q).

b) ((¬ (P ∧ ¬ Q)) ∧ (¬ (Q ∧ ¬ P)))

• R= ¬(P ∧ Q) ≡ ¬P ∨ ¬Q (Lei de De Morgan)

• P ∧ Q ≡ Q ∧ P (Comutatividade da conjunção)

Aplicando essas equivalências, temos:

((¬ (P ∧ ¬ Q)) ∧ (¬ (Q ∧ ¬ P)))

≡ ((¬P ∨ Q) ∧ (¬Q ∨ P)) (Lei de De Morgan)

≡ ((Q ∨ ¬P) ∧ (P ∨ ¬Q)) (Comutatividade da conjunção)

Portanto, a fórmula ((¬ (P ∧ ¬ Q)) ∧ (¬ (Q ∧ ¬ P))) é equivalente a ((Q ∨ ¬P) ∧ (P ∨ ¬Q)).

8)- Demonstre, com o auxílio das equivalências clássicas, que as fórmulas abaixo são equivalentes. Obs: Equivalências clássicas abaixo.

a) (R → P) ∧ (R → Q) e (¬P ∨ ¬Q) → ¬R

• P → Q ≡ ¬P ∨ Q (Implicação)

• ¬(P ∨ Q) ≡ ¬P ∧ ¬Q (Lei de De Morgan)

Assim, temos:

(R → P) ∧ (R → Q)

≡ (¬R ∨ P) ∧ (¬R ∨ Q) (Implicação)

≡ ¬R ∨ (P ∧ Q) (Distributividade da disjunção)

≡ ¬(P ∧ Q) → ¬R (Implicação)

≡ ¬P ∨ ¬Q → ¬R (Lei de De Morgan)

Portanto, as fórmulas (R → P) ∧ (R → Q) e (¬P ∨ ¬Q) → ¬R são equivalentes

b) (¬(P → Q) ∨ S) ∧ ¬P e (P ∨ S) ∧ ((Q → S) ∧ ¬P)

• P → Q ≡ ¬P ∨ Q (Implicação)

• ¬(P ∨ Q) ≡ ¬P ∧ ¬Q (Lei de De Morgan)

Assim, temos:

(¬(P → Q) ∨ S) ∧ ¬P

≡ (¬(¬P ∨ Q) ∨ S) ∧ ¬P (Implicação)

≡ ((¬¬P ∧ ¬Q) ∨ S) ∧ ¬P (Lei de De Morgan)

≡ (P ∧ ¬Q) ∨ S ∧ ¬P (Dupla Negação)

≡ ((P ∨ S) ∧ (¬Q ∨ S)) ∧ (¬P ∧ (¬Q ∨ S)) (Distributividade)

≡ (P ∨ S) ∧ (¬P ∧ ¬Q ∨ S) ∧ (¬P ∧ ¬Q ∨ S) (Distributividade)

≡ (P ∨ S) ∧ ((Q → S) ∧ ¬P) (Lei de De Morgan)

Portanto, as fórmulas (¬(P → Q) ∨ S) ∧ ¬P e (P ∨ S) ∧ ((Q → S) ∧ ¬P) são equivalentes.